Escola Secundária de Alberto Sampaio **11º Ano**

Ficha Formativa de Matemática A – Geometria I

Inclinação e declive de uma reta no plano; ângulo de duas retas; retas perpendiculares.

Equação vetorial da reta:

Dado um ponto $A(x_0, y_0)$ e um vetor $\vec{u} = (u_1, u_2)$, a equação

$$(x, y) = (x_0, y_0) + k.(u_1, u_2), k \in \mathbb{R}$$

é a equação vetorial da reta que contém A e tem a direcção do vetor $\vec{u}$.

Exemplo: A equação vetorial da reta que contém o ponto $A(-2, 3)$ e tem a direcção do vetor $\vec{u} = (1, 2)$ é:

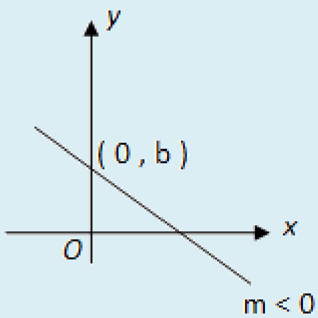
$$(x, y) = (-2, 3) + k.(1, 2) \quad , k \in \mathbb{R}$$

Equação reduzida de uma reta:

A uma equação da forma $y = mx + b$, em que **m** é o declive e **b** a ordenada na origem, chama-se **equação reduzida** da reta.

Nota: equação da reta com declive **m** e que contém o ponto (x_0, y_0)

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$



Exemplo: Determina uma equação reduzida da reta que tem declive 3 e ordenada na origem 2.

Resolução: Como $m = 3$ e $b = 2$, a equação da reta é: $y = 3x + 2$

Nota :

- o declive de uma reta quando se conhecem dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ é dado por: $\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$
- o declive de uma reta quando se conhece o seu vetor director $\vec{u} = (u_1, u_2)$ é dado por : $\boxed{m = \frac{u_2}{u_1}}$

Exemplo: Determina o declive de uma reta que:

a) passa pelos pontos $A(-2, 3)$ e $B(1, 2)$;

b) tem a direcção do vetor $\vec{u} = (-1, 3)$.

Resolução:

a) $A(-2,3)$ e $B(1,2)$ $\qquad m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{2-3}{1-(-2)}=-\dfrac{1}{3}$

b) $\vec{u}=(-1,3)$ $\qquad m=\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{3}{-1}=-3$

<u>Exercícios Propostos</u>:

1. Determina uma equação vetorial da reta que:

a) passa no ponto $A(1,-2)$ e tem a direcção do vetor $\vec{u}=(-1,3)$;

b) passa pelos pontos $A(-2,1)$ e $B(1,3)$;

c) passa na origem dos eixos coordenados e tem a direcção do vetor $\vec{v}=(1,-4)$;

d) contém o ponto $C(-2,2)$ e tem a direcção do eixo Ox;

e) contém o ponto $D(-1,5)$ e é paralela ao eixo Oy.

2. Determina a equação reduzida da reta que:

a) passa no ponto $A(1,-2)$ e tem a direcção do vetor $\vec{u}=(-1,3)$

b) tem declive -3 e contém o ponto $A(1,-1)$

c) tem declive 1 e passa pelo ponto $B(0,2)$;

d) passa pelo ponto $A(1,1)$ e tem a direcção do vetor $\vec{u}=(-1,3)$;

e) contém o ponto $B(3,0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v}=(1,-2)$;

f) contém o ponto $C(-3,2)$ e tem a direcção do vetor $\vec{a}=(2,1)$.

3. Determina o declive de uma reta que:

a) contém os pontos $A(-2,1)$ e $B(1,3)$;

b) contém os pontos $C(2,3)$ e $D(-2,4)$;

c) tem a direcção do vetor $\vec{u}=(-3,6)$;

d) é paralela ao vetor $\vec{v}=(-2,-4)$

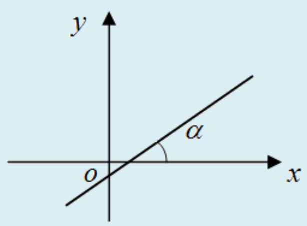
4. Representa graficamente cada uma das retas:

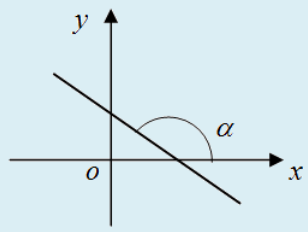
a) $y=x+2$;

b) $y=-x+3$.

<u>Declive como tangente da inclinação de uma reta no plano</u>

Ao traçarmos uma reta oblíqua num referencial o.n. do plano observamos que ela forma com o eixo dos Ox, dois ângulos.
Chamamos **<u>inclinação</u>** de uma reta à amplitude α do ângulo definido pelo semieixo positivo do eixo Ox e pela reta .





Sabendo que o declive m da reta é definido por:

$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

E atendendo à definição de tangente de um ângulo de amplitude α, podemos escrever:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m}$$

Logo,

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = m}$$

Exemplo: Considera a reta r de equação: $r: (x, y) = (-1, 2) + k.(3, 1) \quad , k \in \mathbb{R}$

Determina:

a) o seu declive;

b) a sua inclinação

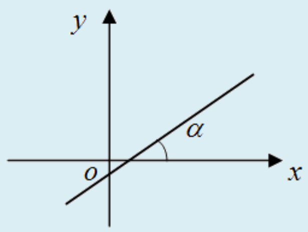
Resolução:

a) Sendo $\vec{r} = (3, 1)$ e $m = \frac{u_2}{u_1}$ então $m = \frac{1}{3}$;

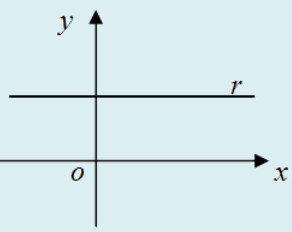
b) $m = \operatorname{tg} \alpha$, logo $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ e então $\alpha = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \alpha \approx 18{,}43° \text{ (2 c.d.)}$

Assim, tendo em atenção a variação de sinal de $\operatorname{tg} \alpha$, podemos concluir que :

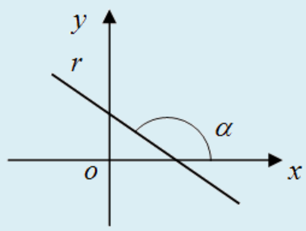
- Declive positivo, $m > 0$ então $0° < \alpha < 90°$:



- Declive nulo, $m = 0$ então $\alpha = 0°$ ou $\alpha = 180°$



- Declive negativo, $m < 0$ então $90° < \alpha < 180°$:



Quando a inclinação de uma reta é de $90°$ (reta vertical), a tangente não está definida, pelo que não é possível atribuir ao declive um número real.

Exercícios Propostos:

5. Para cada uma das retas, indica o declive e a inclinação:

a) $r: \ y = 2x - 1$

b) $r: \ y = -\frac{1}{2}x + 3$

c) $r: \ (x, y) = (1, 2) + k.(1, -1) \ , k \in \mathbb{R}$

d) $r: \ (x, y) = (-2, 3) + k.\left(\sqrt{3}, 3\right) \ , k \in \mathbb{R}$

<u>Ângulo de duas retas</u>

Dadas as retas, r **e** s, concorrentes e não perpendiculares:

O ângulo de duas retas concorrentes corresponde ao ângulo de amplitude α, por elas definido, tal que:

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

Nota que: Se as **<u>retas forem paralelas</u>**, o ângulo por elas definido tem de amplitude 0° .
Se as **<u>retas forem perpendiculares</u>**, o ângulo tem de amplitude 90° .

Para determinar a amplitude α do ângulo definido pelas retas concorrentes r e s, utiliza-se a fórmula:

$$\cos(\vec{r} \,\hat{}\, \vec{s}) = \frac{\left|\vec{r} \cdot \vec{s}\right|}{\left\|\vec{r}\right\| \times \left\|\vec{s}\right\|}$$

sendo $\vec{r}$ e $\vec{s}$ os vetores diretores das retas r e s **,** respetivamente.

Exemplo: Determina, com aproximação às unidades, a amplitude do ângulo definido pelas retas r e s:

$r: \ (x, y) = (-2, 1) + k.(1, -3) \ , k \in \mathbb{R}$

$s: \ y = \frac{3}{2}x + 1$

Resolução:

Em relação à reta r**,** um vetor diretor será $\vec{r} = (1, -3)$,

Em relação à reta **s**, $m_s = \frac{3}{2}$, logo um vetor diretor será $\vec{s} = (2, 3)$.

Então, $\cos\alpha = \frac{\left|\vec{r} \cdot \vec{s}\right|}{\left\|\vec{r}\right\| \times \left\|\vec{s}\right\|} = \frac{\left|(1, -3).(2, 3)\right|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2} \times \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|2 - 9|}{\sqrt{10} \times \sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{130}}$

Recorrendo à calculadora, concluímos que:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{130}}\right) \approx 52^\circ$$

Retas Perpendiculares

Duas retas são perpendiculares quando o ângulo definido pelas retas é $90°$, o que é equivalente a calcular o ângulo definido pelos vetores diretores das retas.

Considerando:

Reta	Vetor diretor
r: $y = mx + b$	$\vec{r} = (1, m)$
s: $y = m_1 x + b_1$	$\vec{s} = (1, m_1)$

Conclusão: Duas retas são perpendiculares se o declive de uma é igual ao simétrico do inverso da outra.

Retas	Relação entre os declives
r: $y = mx + b$ s: $y = m_1 x + b_1$	$m_1 = -\frac{1}{m}$

Exemplo: Dada a reta de equação $r: \; y = \frac{1}{3}x + 2$.

Determina uma equação da reta s, perpendicular a r e que passa pelo ponto $A(-3, 4)$.

Resolução: Podemos estabelecer que

Reta	Declive
r	$m = \frac{1}{3}$
s	$m_1 = -3$

Uma equação da reta s é: $y - 4 = -3(x + 3) \Leftrightarrow y = -3x - 9 + 4 \Leftrightarrow y = -3x - 5$

Exercícios Propostos:

6. Dada a reta $r: \; y = -2x + 3$.

Determinar uma equação da reta s, perpendicular a r e que passa pelo ponto B $(2, 3)$.

7. Calcula m de modo que $\vec{u} = (2, m)$ seja perpendicular a $\vec{v} = (3, 2)$.

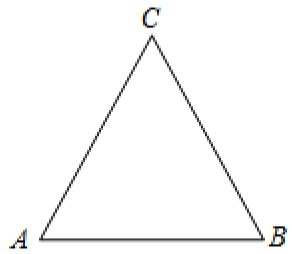
8. Considera a reta r de equação $y = -2x + 3$.

O valor de k para o qual o vetor $\vec{u} = (2, k)$ tem direcção perpendicular à reta r é :

(A) -2 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

9. Na figura está representado um triângulo equilátero de perímetro 12 cm.

O valor do produto escalar $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ é:



(A) 4 **(B)** 8 **(C)** 16 **(D)** -8

10. Acerca de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabe-se que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$ e $\vec{u}.\vec{v} = -4$

Então podemos afirmar que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são:

(A) perpendiculares
(B) não colineares
(C) colineares do mesmo sentido
(D) colineares de sentidos contrários

11. Considera num referencial ortonormado Oxy, os pontos $A(-1,3)$ e $B(2,1)$ e a reta r de equação $r: \ y=-3x+2$

a) Determina o ângulo que a reta r faz com o eixo dos yy .

b) Calcula o ângulo definido pelas retas r e AB, com aproximação às centésimas de grau .

SOLUÇÕES:

1a) $(x,y)=(1,-2)+k(-1,3), k\in\Re$

1b) $(x,y)=(-2,1)+k(3,2), k\in\Re$

1c) $(x,y)=(0,0)+k(1,-4), k\in\Re$

1d) $(x,y)=(-2,2)+k(1,0), k\in\Re$

1e) $(x,y)=(-1,5)+k(0,1), k\in\Re$

2a) $y=-3x-5$

2b) $y=-3x+2$

2c) $y=x+2$

2d) $y=-3x+4$

2e) $y=-2x+6$

2f) $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

3a) $m=\frac{2}{3}$

3b) $m=-\frac{1}{4}$

3c) $m=-2$

3d) $m=2$

5a) Declive: $m=2$ Inclinação: $\alpha=63{,}43^\circ$

5b) Declive: $m=-\frac{1}{2}$ Inclinação: $\alpha=153{,}43^\circ$

5c) Declive: $m=-1$ Inclinação: $\alpha=135^\circ$

5d) Declive: $m=\sqrt{3}$ Inclinação: $\alpha=60^\circ$

6. $y=\frac{1}{2}x+2$

7. $m=-3$

8. $k=1$ Resp. (B)

9. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=8$ Resp. (B)

10. Resp. (D)

11a) $\cos\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ $\alpha=18{,}43^\circ$

11b) $\cos\alpha=\frac{9\sqrt{130}}{130}$ $\alpha=37{,}87^\circ$